بی‌نهایت، ازلیت و ابدیتی که چندان نمی‌شناسیم

علی‌اصغر رضائی
استادیار گروه ریاضی، دانشگاه کاشان، ایران

اشاره
در ایـــن مقاله دربارهٔ مفهوم «بی‌نهایـــت» از منظر ریاضی کنکاش و جنبه‌های متفاوتی از آن در ریاضیات ذکر می‌شود و از بی‌نهایت به‌عنوان مفهومی برای کمک به درک بهتر عظمت هستی و خالق آن یاد خواهیم کرد.

ریاضیات ناب‌ترین آفریدهٔ ذهن بشر و زیباترین تجلی خلاقیت فکری است

مقدمه

یکی از دغدغه‌های نگارنده به‌عنوان معلم ریاضی که افتخار همکاری با برخی دانشگاه‌های کشور را داشته‌ام، تبدیل مطالب درســـی انتزاعی‌ترین علم جهان به مباحث ملموس و در عین حال روزمرهٔ زندگی بوده است. این مهم را می‌توان از دو طریق انجـــام داد: یکی ذکر کاربردهای مطلب مـــورد نظر و دیگری دعوت به اندیشـــیدن به مطالب ماورای ریاضی با اســـتفاده از همان مطالب ریاضی.

شـــاید برای برخی‌ها پیوستگی، مشـــتق‌پذیری، تابع جزء صحیح، عددهای اصلی، خطوط مـــوازی و مانند آن، مفاهیمی صرفاً ریاضی به حساب آیند، اما به نظر می‌رسد هرکدام از این‌ها تعریفی ماورایی دارند که در ریاضیات تجلی یافته‌اند. آیا کسی می‌تواند «پیوسته بودن» خط حقیقی را با تمام وجود درک کند؟ آیا کســـی می‌داند تابعی که همه جا پیوســـته است و هیچ جا مشتق‌پذیر نیست، چه شکلی دارد؟ کدام رایانه‌ها در جهان قادر به ترسیم چنین تابعی به معنای واقعی هستند؟

ریاضیـــات ناب‌تریـــن آفریدهٔ ذهن بشـــر و زیباترین تجلی خلاقیت فکری است. اگر بخواهیم سیاهه‌ای از مباحث ماورایی ریاضی تهیه کنیم، احتمالاً ناچـــار خواهیم بود تمامی مفاهیم ریاضی را فهرست کنیم که پرداختن به هرکدام زمان به نسبت زیادی نیاز دارد. در این نوشتار، نگاه کوتاهی خواهیم داشت بر مفهوم بی‌نهایت؛ یکی از چالشی‌ترین مفاهیمی که برای بسیاری از خوانندگان مبتدی ریاضی ناشناخته است و حتی برخی آن را به غلط یک عدد خیلی‌خیلی بزرگ می‌انگارند. ابتدا مصداق‌هایی از بی‌نهایـــت را در ریاضـــی می‌آوریم و ســـپس به بحث ازلی و ابدی بودن خالق هســـتی، به‌عنوان جلوه‌ای از بی‌نهایت، اشارهٔ مختصری می‌کنیم.

بی‌نهایت در ریاضیات

در ریاضیات، بی‌نهایت، برخلاف آنچه در فیزیک گفته می‌شود، نســـبی نیســـت. از نظر یک ریاضی‌دان، جرم زمین، خورشید، کهکشان راه شیری و شاید تمام هستی، یک عدد متناهی است. تعبیرهایی که در ریاضیات از بی‌نهایت می‌شود، متنوع است. در اینجا به ســـه مورد از مهم‌ترین آن‌ها اشاره می‌کنیم: حد دنباله، توصیف مجموعه‌ها و در انتها مفهوم خط در هندسه.

حد یک دنباله یا یک تابع

اگر بگوییم حد یک دنباله به بی‌نهایت میل می‌کند، یعنی جملات آن از هر عددی بزرگ‌تر می‌شـــوند. به عبارت دیگر، در اینجا منظور از «میل کردن به بی‌نهایت» توضیح یک رفتار است

اگر بگوییم حد یک دنباله به بی‌نهایت میل می‌کند، یعنی جملات آن از هر عددی بزرگ‌تر می‌شوند. به عبارت دیگر، در اینجا منظور از «میل کردن به بی‌نهایت» توضیح یک رفتار است نه نزدیک شدن به یک عدد

نه نزدیک شـــدن به یک عدد. در مورد توابع نیز بحث مشابهی برقرار است. از این منظر، بی‌نهایت نه به معنای «بزرگ» است و نه به معنای «خیلی بزرگ» و نه به معنای «خیلی‌خیلی بزرگ»، بلکه مفهوم آن این است: بزرگ‌تر از هر چیزی و افزون‌تر از هر مقداری. نمادی که برای این مفهوم به‌کار می‌رود «∞» است.

توصیف مجموعه‌ها و عدد اصلی

اگر مجموعه‌ای تهی باشـــد یا تعـــداد عناصر آن یک عدد طبیعی باشـــد، آن مجموعه را «متناهـــی» گوییم. در غیر این صورت به آن «نامتناهی» گفته می‌شود. اگر مجموعه‌ای چون A نامتناهی باشد، در پاسخ به این پرسش که «چند عضو دارد»، ممکن است تعداد عناصر آن را با عبارت نادقیق «بی‌نهایت عضو» توصیف کنند. نادقیق بودن از آن جهت که اگر A و B نامتناهی باشند، «تعداد» عناصرشان لزوماً یکسان نیست. البته لازم است مفهوم «تعداد» را تشریح کنیم. در ریاضیات نوین، به جای تعداد عناصـــر در یک مجموعه، از عبـــارت دقیق‌تر «عدد اصلی یک مجموعه» استفاده می‌کنند. عدد اصلی مفهومی است که برای بیان «اندازهٔ» مجموعه‌ها به‌کار می‌رود. به عبارت دیگر، عددهای اصلی عددهایی هستند که مفهوم «تعداد عناصر یک مجموعه» را تعمیم می‌دهند. برای مجموعه‌های متناهی، عددهای اصلی همان ۰، ۱، ۲، ۳ و ... هستند و اگر A و B دو مجموعهٔ متناهی باشند که تعداد عناصر یکســـانی دارند، می‌گوییم A و B عدد اصلی یکســـانی دارند. برای مثال، اگر A بیانگر مجموعهٔ امامان شیعه(ع) و B بیانگر مجموعهٔ ماه‌های سال باشد، آن‌گاه A و B عدد اصلی یکسانی دارند.

در حالـــت نامتناهی، این مفهوم را با کمک توابع تشـــریح می‌کنیـــم. دو مجموعـــهٔ A و B مفروض‌اند. می‌گوییم A و B عدد اصلی یکســـانی دارند یا اصطلاحاً هم‌توان هستند، هرگاه تابعی یک به یک و پوشـــا از A به B موجود باشد. شرط یک به یک بودن و پوشایی تضمین می‌کند که هر عنصر از A با عضو منحصربه‌فردی از B متناظر اســـت و برعکس (در برخی متون ریاضی می‌گوینـــد A و B در تناظر یک به یک با یکدیگر قرار دارند). اگر بخواهیم با عبارت‌های غیرریاضی این مطالب را شرح دهیم، می‌توان A و B را دو کشـــور در نظر گرفت که قرار است سربازان آن دو در یک نبرد تن به تن با یکدیگر کشتی بگیرند. هم‌توانی A و B یعنی هر سرباز از A هماورد منحصربه‌فردی از B دارد و برعکس. درواقع، هیچ سربازی از A بدون حریف نیست و هر ســـرباز هم تنها و تنها یک حریف دارد. همین وضعیت در مورد کشور B نیز برقرار است. عدد اصلی مجموعهٔ A را با نماد «Card A» نمایش می‌دهیم.

شاید از نظر کسی که ریاضیات را در حد دبیرستان خوانده باشـــد، مجموعهٔ عددهای صحیح از نظر تعداد عناصر، مجموعهٔ بزرگ‌تری نسبت به مجموعهٔ عددهای طبیعی باشد. حتی ممکن است این گمان غلط به وجود آید که Z دوبرابر N عضو دارد. اما چنین نیست. عدد اصلی این دو مجموعه یکسان است. در نمودار ۱، تناظر یک به یک بین عناصر N و Z را در نظر بگیرید.

در سطر نخســـت، اعضای N و در سطر دوم اعضای Z قرار دارند. همچنان که می‌بینید، تابع با ضابطهٔ

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{۲} & (n \text{ زوج})\\[2mm] \dfrac{۱-n}{۲} & (n \text{ فرد})\end{cases}$$

از N به Z هم یک به یک اســـت و هم پوشا. شاید این هم‌توانی N و Z برای خوانندگان غیرحرفه‌ای ریاضی حیرت‌انگیز باشد، اما حیرت‌انگیزتر از آن هم‌توانی N و Q (مجموعهٔ عددهای گویا یا کسری) است. به نظر می‌رسد تعداد عددهای گویا یا کسری آن‌قدر زیاد اســـت که بارها و بارها از تعداد اعضای N بیشـــتر است. اما چنین نیست. توهم بیشتر بودن عددهای گویا نسبت به عددهای طبیعی، از تجربه‌های محاسباتی ما ناشی می‌شود.

در ریاضیات، بی‌نهایت، برخلاف آنچه در فیزیک گفته می‌شود، نسبی نیست. از نظر یک ریاضی‌دان، جرم زمین، خورشید، کهکشان راه شیری و شاید تمام هستی، یک عدد متناهی است

طبق تجربهٔ دانش‌آموزی ما، بین هر دو عدد گویا، هر چقدر هم که به هم نزدیک باشـــند، باز هم عدد گویایی وجود دارد. یعنی بـــا یک فرایند نامتناهی می‌توان بین عددهای گویای صفر و ۱ بی‌نهایت عدد گویای دیگر یافت. همین کار را می‌توان بین ۱ و ۲ نیز انجام داد و بین ۲ و ۳ تا آخر. بنابراین، یک نتیجهٔ نادقیق این اســـت که فقط در بازهٔ (۱ و ۰) به اندازهٔ همهٔ عددهای طبیعی، عدد گویا وجود دارد؛ چه برســـد به دیگر بازه‌ها که تعداد بازه‌ها هم نامتناهی اســـت: (۲ و ۱)، (۳ و ۲)، (۴ و ۳) و ... . اما نتیجهٔ شگفت‌انگیز آن است که Q با N هم‌توان است. درواقع، اعضای Q را «می‌توان شـــمارش کرد». یا بـــه عبارت دیگر، می‌توان به هر عضو از Q یک و تنها یک عضو از N متناظر کرد، به طوری که این تناظر دوســـویه باشد. در نمودار ۲ می‌توان این شمارش را ملاحظه کرد. توجه کنید که عددهای آبی‌رنگ قبلاً شمرده شده‌اند و در شمارش لحاظ نمی‌شوند.

اهمیت این شمارش چنان است که مجموعه‌های نامتناهی را به دو دسته تقسیم می‌کنند: آن‌هایی که با N هم‌توان هستند و آن‌هایی که با N هم‌توان نیســـتند. دستهٔ اول را مجموعه‌های شمارای نامتناهی و دستهٔ دوم را مجموعه‌های ناشمارا می‌نامند.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
۰	۱	-۱	۲	-۲	۳	-۳	۴	...

نمودار ۱

	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	...
۱	$\frac{۱}{۱}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۷}$	$\frac{۱}{۸}$	...
۲	$\frac{۲}{۱}$	$\frac{۲}{۲}$	$\frac{۲}{۳}$	$\frac{۲}{۴}$	$\frac{۲}{۵}$	$\frac{۲}{۶}$	$\frac{۲}{۷}$	$\frac{۲}{۸}$	...
۳	$\frac{۳}{۱}$	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۳}$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۳}{۵}$	$\frac{۳}{۶}$	$\frac{۳}{۷}$	$\frac{۳}{۸}$	...
۴	$\frac{۴}{۱}$	$\frac{۴}{۲}$	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{۴}{۴}$	$\frac{۴}{۵}$	$\frac{۴}{۶}$	$\frac{۴}{۷}$	$\frac{۴}{۸}$	...
۵	$\frac{۵}{۱}$	$\frac{۵}{۲}$	$\frac{۵}{۳}$	$\frac{۵}{۴}$	$\frac{۵}{۵}$	$\frac{۵}{۶}$	$\frac{۵}{۷}$	$\frac{۵}{۸}$	...
۶	$\frac{۶}{۱}$	$\frac{۶}{۲}$	$\frac{۶}{۳}$	$\frac{۶}{۴}$	$\frac{۶}{۵}$	$\frac{۶}{۶}$	$\frac{۶}{۷}$	$\frac{۶}{۸}$	...
۷	$\frac{۷}{۱}$	$\frac{۷}{۲}$	$\frac{۷}{۳}$	$\frac{۷}{۴}$	$\frac{۷}{۵}$	$\frac{۷}{۶}$	$\frac{۷}{۷}$	$\frac{۷}{۸}$	...
۸	$\frac{۸}{۱}$	$\frac{۸}{۲}$	$\frac{۸}{۳}$	$\frac{۸}{۴}$	$\frac{۸}{۵}$	$\frac{۸}{۶}$	$\frac{۸}{۷}$	$\frac{۸}{۸}$	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

نمودار ۲

برای مثال Z و Q شـمارا هســتند. اما R (مجموعهٔ عددهای حقیقی) ناشماراست. درواقع، اعضای R آن‌قدر «زیاد» هستند که نمی‌توان هیچ تناظر یک به یکی میان N و R به دست آورد. **کانتور** اولین کســی بود که این مطلــب را ثابت کرد. به بیان نادقیق، تعداد عناصر R اکیداً بیشــتر از تعداد عناصر N است و به بیان دقیــق Card N<Card R. (منظور از Card R، تعداد عناصر R است)

آیا R بزرگ‌ترین مجموعه از نظر تعداد عناصر است؟ جواب منفی اســت. اگر مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های R را با P(R) نمایش دهیم، آن‌گاه Card R<Card P (R) . یعنی تعداد عناصر P(R) از تعداد عناصر R به مراتب بیشتر است. P(R) هم خیلی بزرگ نیســت، زیرا P(P(R)) تعداد عناصر به مراتب بیشــتری دارد. با ادامهٔ این فرایند، یک دنبالهٔ نامتناهی از عددهای اصلی «ترامتناهی» به‌صورت زیر به دست می‌آید:

Card N<Card R<Card P(R)<Card P(P(R))<Card P(P(P(R)))<...

بنابراین، در دنیای بی‌نهایت‌ها یک ترتیب یافته‌ایم که بزرگ‌تر از هر بی‌نهایت، یک بی‌نهایت دیگر وجود دارد. یک نکتهٔ جالب در مورد دنبالهٔ فوق این است که تاکنون کسی نتوانسته است مجموعه‌ای مانند A بیابد که عدد اصلی آن بین عدد اصلی N و عدد اصلی R باشد. یعنی مجموعه‌ای مانند A، ارائه نشده است. به طوری که Card N<Card A<Card R. در مورد دیگر نامساوی‌ها در دنبالهٔ

در دنیای بی‌نهایت‌ها یک ترتیب یافته‌ایم که بزرگ‌تر از هر بی‌نهایت، یک بی‌نهایت دیگر وجود دارد

فوق هم همین وضعیت برقرار است. این مطلب که در دنبالهٔ فوق عدد اصلی دیگری وجود دارد، به فرضیهٔ «پیوستار» موسوم است.

امتداد خط‌ها

در هندسهٔ کلاســیک، خط یک مفهوم تعریف‌نشده است، اما رفتار آن را از روی «بنداشت‌ها» می‌توان بررسی کرد. شایان ذکر است که در چارچوب اصل موضوعی، تمامی هندسه با استفاده از مفاهیم تعریف‌نشــده و «بنداشــت‌های وقوع»، «میان‌بود»، «قابلیت انطباق»، «پیوستگی» و «توازی» مطالعه می‌شود. در اینجا سه مورد از مهم‌ترین بنداشــت‌هایی را که به رفتار خط مربوط‌اند ذکر می‌کنیم:

- از هر دو نقطه مانند A و B خط منحصربه‌فردی می‌گذرد که با نماد $\overleftrightarrow{AB}$ نمایش داده می‌شود.
- روی هر خــط $\overleftrightarrow{AB}$ می‌توان نقاطی را بین A و B و نیز نقاطــی را خارج A و B یافت (طبق این بنداشــت یک خط به نقطه محدود نمی‌شود).
- هــر پاره‌خط را می‌توان از هــر دو طرف به اندازهٔ دلخواه امتداد داد (طبق این خاصیت «طول» خط نامتناهی است).

توجه کنید که نیم‌خط را فقط می‌توان از یک طرف امتداد داد، اما ماهیت خط «ازلی» و «ابدی» است. یعنی ابتدای خط و انتهای آن مشــخص نیست. زمانی که برای نمایش عددهای حقیقی از یک خط استفاده می‌شــود، «ازل همان $-\infty$» و «ابد همان $+\infty$» اســت. اینکه ما در چه نقطه‌ای از تاریخ خلقت قرار داریم، قطعاً یک عدد متناهی و به‌طور دقیق‌تر یک بازهٔ متناهی اســت و اینکه تا چه زمانی ادامه خواهیم داد، پاسخش احتمالاً ∞ یا «ابد» است (هرچند که شکل حیات ما ممکن است تغییر کند؛ همچنان که عددها هم تغییر علامت می‌دهند).

اما سؤال مهم‌تر آن است که ابتدای خلقت چه زمانی بوده و خالق از چه زمانی بوده است؟ طبق آموزه‌های دینی، «خالق» از ازل بوده است؛ از زمانی که هیچ ابتدایی نبوده. شاید خط حقیقی مثال ساده‌ای باشد برای پی بردن به عظمت هستی و کردگار. بی‌نهایت چیزی است فراتر از هر چیزی و بی‌نهایت منفی چیزی است قبل‌تر از هر چیزی.

منابع

1. Shwu-Yeng T. Lin and You-Feng Lin, *Set theory with applications.* 2nd ed. Mariner Publishing Company. 1981.
2. Greenberg, Marvin J. *Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history.* Macmillan, 1993.
3. Thomas, George Brinton, et al. Thomas' calculus. Reading: Addison-Wesley, 2003.